

ASOCIACIÓN PERUANA DE ECONOMÍA

Comparando Comisiones por Flujo y Saldo en Fondos de Pensiones con Cuentas Individuales de Capitalización

Luis Chávez-Bedoya

Nelson Ramírez-Rondán

Documento de Trabajo No. 9, Marzo 2014

Los puntos de vista expresados en este documento de trabajo corresponden a el(los) autor(autores) y no de la Asociación Peruana de Economía. La asociación no tiene una posición política institucional.

Comparando Comisiones por Flujo y Saldo en Fondos de Pensiones con Cuentas Individuales de Capitalización

Luis Chávez-Bedoya* Nelson Ramírez Rondán†

25 de Marzo de 2014

Resumen

En el presente artículo se desarrolla una metodología en tiempo discreto para comparar esquemas de cobro de comisiones por saldo y flujo (sueldo) en la fase de acumulación de un fondo de pensiones bajo capitalización individual. Asimismo, a través de distintos métodos, se estudia el efecto de la varianza del fondo de pensiones en el desempeño e idoneidad de los tipos de comisión antes mencionados. Finalmente, se realiza una aplicación práctica y se muestran resultados en el marco del Sistema Privado de Pensiones del Perú, incluyendo valores de indiferencia entre comisiones para los criterios de comparación considerados.

Clasificación JEL: G23

Palabras clave: Fondos de pensiones, comisión por flujo, comisión por saldo

*Esan Graduate School of Business, e-mail: lchavezbedoya@esan.edu.pe

†Banco Central de Reserva del Perú, e-mail: nelson.ramirez@bcrp.gob.pe

Comparing Front-end Load and Balance Fees in Pension Funds with Individual Capitalization Accounts

Abstract

In the present article we develop a discrete-time methodology to compare front-end load and balance fees in the accumulation phase of a defined-contribution pension fund under the system of individual accounts. Additionally, using various methods, we study the effect of the fund's variance in the performance and suitability of the aforementioned types of fees. Finally, we perform a practical application and show the results in the frame of the Peruvian Private Pension System, including the indifference values between fees for the different criteria considered.

JEL Classification: G23

Key words: Pension funds, front-end load fee, balance fee

1 Introducción

Durante el último cuarto del siglo pasado muchos países latinoamericanos reformaron sus sistemas pensionarios, migrando de sistemas públicos de reparto a sistemas privados con cuentas individuales de capitalización (CIC). Las reformas llevadas a cabo se encuentran descritas a profundidad en Sinha (2000), y Kay y Kritzer (2001), además de las referencias allí citadas. Asimismo, se sugiere llevar a cabo una nueva serie de reformas cuyos retos fundamentales, considerados en Kritzer et. al. (2011), son aumentar la cobertura y competencia de los sistemas previsionales, así como reducir sus costos de administración.

Como menciona James et al. (2001), una de las principales críticas a los sistemas con CIC es su elevado costo. Por otro lado, Mitchell (1998) afirma que a pesar de sus altos costos, dichos sistemas tienden a brindar un mejor servicio en comparación a los sistemas públicos. Sin embargo, resulta complicado comparar los costos de los sistemas privados, inclusive entre países latinoamericanos, debido a que existen formas distintas de cobrar comisiones de administración. Según Corvera et al. (2006) y Kritzer et al. (2011) dichas comisiones pueden ser: proporcional sobre el flujo (generalmente expresada como porcentaje del salario), fija sobre el flujo, proporcional sobre activos administrados (saldo) y proporcionales sobre rendimientos nominales y excedentes. A pesar que en años recientes han habido modificaciones en su cobro, Sinha (2001), Masías y Sánchez (2007), y Martínez y Murcia (2008), analizan en detalle las comisiones

en los sistemas previsionales de México, Perú y Colombia, respectivamente.

El presente artículo analiza únicamente las comisiones proporcionales por flujo y saldo, las cuales son los tipos más comunes en latinoamérica. Para Queisser (1999) la comisión por flujo es más ventajosa que la comisión por saldo para las compañías administradoras de fondos de pensiones (AFP) en la fase inicial del sistema, y la comisión por saldo tiende a ser más cara en el largo plazo al incrementar los montos de las CIC. Pero, Shah (1997) estipula que la comisión por flujo crea distorsiones y tendencias indeseables como fomentar que las AFP tengan gastos iniciales muy altos, generar pérdidas para los trabajadores mayores, y desalentar la competencia del sistema.

La forma tradicional de comparar comisiones por saldo y flujo es a través de una comisión por saldo equivalente, la cual iguala el valor esperado de los fondos finales (bajo ambos esquemas de cobro) durante el periodo de acumulación. Este enfoque se introduce en Diamond (2000) y Shah (1997), se refina en Blake y Board (2000), y se utiliza como criterio estándar para la comparación de comisiones. Es en esta línea que la principal contribución del artículo está en desarrollar métodos alternativos para comparar dichas comisiones, además de determinar su comportamiento transitorio y de largo plazo, y analizar su sensibilidad ante cambios en ciertos parámetros importantes. Los métodos alternativos de comparación introducidos son el ratio del valor futuro de las comisiones cobradas, la inversa del coeficiente de variación de los fondos finales y el valor

en exceso del fondo final por unidad de riesgo inspirado por Sharpe (1966).

Para poder aplicar algunos de los métodos de comparación antes mencionados, es fundamental calcular la varianza del fondo final del afiliado; es por ello que es necesario introducir un proceso estocástico adecuado para el valor cuota del fondo de pensiones. Utilizando un movimiento Browniano geométrico, se pueden obtener expresiones analíticas para la varianza del fondo final, permitiendo la derivación de propiedades importantes, y sobre todo distintas a las que se obtienen al utilizar únicamente valores esperados. En general, se puede concluir que la comisión por saldo mejora su desempeño a la luz de los métodos de comparación que incluyen la varianza del fondo.

La estructura del presente trabajo de investigación es la siguiente: en la sección 2 se propone una metodología de modelación y comparación de las comisiones por flujo y saldo. La aplicación práctica de la metodología propuesta al Sistema Privado de Pensiones del Perú se realiza en la sección 3. Finalmente, en la sección 4 se concluye y se brindan ciertas recomendaciones.

2 Metodología

Consideremos $i \in \mathbb{Z}$ y $T \in \mathbb{Z}^+$ tales que $0 \leq i \leq T - 1$. El índice i representa un mes particular, y T es el número de meses que faltan para la jubilación del afiliado. Asumimos que el valor cuota, $V(t)$, de un fondo de pensiones

representativo de una Administradora de Fondos de Pensiones (AFP) en el tiempo t satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica (EDE):

$$dV(t) = \mu V(t)dt + \sigma V(t)dB(t), \quad V(0) = V_0. \quad (1)$$

Donde μ es la tasa de crecimiento del fondo, σ la volatilidad de los retornos logarítmicos del mismo, V_0 es el valor cuota inicial, y el proceso estocástico B es un movimiento Browniano estándar unidimensional. La EDE en (1) es una especificación común para modelar el valor cuota, pues es muy utilizada en modelos de control estocástico para fondos de pensiones como comenta Cairns (2000). A continuación describiremos con detalle las comisiones por flujo y saldo utilizando una estructura similar a la proporcionada por Diamond (2000).

2.1 Comisión por saldo

Sea $\delta > 0$ la comisión por saldo mensual expresada en tiempo continuo. Además, en el mes i el afiliado aporta una suma $W_i \geq 0$ a su fondo de capitalización individual. Si el valor cuota, V , se normaliza a la unidad en el periodo i , entonces el aporte W_i equivale al mismo número de cuotas. Es decir que para $t \geq i$, y basándonos en la EDE (1), el aporte realizado en i seguiría el siguiente proceso estocástico:

$$W_s^i(t) = W_i e^{(\mu - \delta - \frac{\sigma^2}{2})(t-i) + \sigma(B(t) - B(i))}, \quad i \leq t \leq T. \quad (2)$$

El proceso estocástico W_s^i es un movimiento Browniano geométrico (GBM) de parámetros $\mu - \delta$ y σ^2 , i.e., $W_s^i \sim \text{GBM}(\mu - \delta, \sigma^2)$. Al afiliado le interesa el valor final de su fondo, $W_s(T)$, el cual es la suma de los valores finales de todos los aportes realizados según la estructura dada en (2). Entonces,

$$W_s(T) = \sum_{i=0}^{T-1} W_s^i(T), \quad (3)$$

donde los procesos W_s^i están sujetos a la misma fuente de incertidumbre B dada por (1). Es importante calcular la esperanza, $\mathbb{E}[W_s(T)]$, y la varianza, $\text{Var}(W_s(T))$, del valor final del fondo del afiliado. A partir del GBM en (2) resulta claro que

$$\mathbb{E}[W_s^i(T)] = W_i e^{(\mu-\delta)(T-i)}, \quad (4)$$

con lo cual

$$\mathbb{E}[W_s(T)] = \sum_{i=0}^{T-1} W_i e^{(\mu-\delta)(T-i)} = e^{(\mu-\delta)T} \sum_{i=0}^{T-1} W_i e^{-(\mu-\delta)i}. \quad (5)$$

Para el cálculo de $\text{Var}(W_s(T))$, es necesario calcular la varianza de $W_s^i(T)$ y la covarianza entre $W_s^i(T)$ y $W_s^j(T)$. Como $W_s^i(T)$ tiene una distribución log-normal

$$\text{Var}(W_s^i(T)) = W_i^2 e^{2(\mu-\delta)(T-i)} \left(e^{\sigma^2(T-i)} - 1 \right), \quad (6)$$

asimismo para $j > i$ y $W_j > 0$ se tiene

$$\text{Cov}(W_s^i(T), W_s^j(T)) = \text{Var}(W_s^j(T)) \frac{W_i}{W_j} e^{(\mu-\delta)(j-i)}. \quad (7)$$

Las fórmulas (6) y (7) generan la siguiente expresión para la covarianza de los valores finales de los aportes i y j para todo $0 \leq i \leq T-1$ y $0 \leq j \leq T-1$

$$\text{Cov}(W_s^i(T), W_s^j(T)) = W_i W_j e^{(\mu-\delta)(T-i+T-j)} \left(e^{\sigma^2(T-\max\{i,j\})} - 1 \right). \quad (8)$$

Utilizando (8), se puede calcular la varianza de $W_s(T)$ a través de

$$\text{Var}(W_s(T)) = \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} W_i W_j e^{(\mu-\delta)(T-i+T-j)} \left(e^{\sigma^2(T-\max\{i,j\})} - 1 \right). \quad (9)$$

Una propiedad interesante es que es posible expresar el valor esperado y la varianza de $W_s(T+1)$ como funciones del valor esperado y la varianza de $W_s(T)$ y el aporte W_T . La expresión recursiva de $\mathbb{E}[W_s(T)]$ es

$$\mathbb{E}[W_s(T+1)] = e^{\mu-\delta} (\mathbb{E}[W_s(T)] + W_T), \quad (10)$$

mientras que la de la varianza es

$$\text{Var}(W_s(T+1)) = e^{2(\mu-\delta)} \left(e^{\sigma^2} \text{Var}(W_s(T)) + (e^{\sigma^2} - 1) (\mathbb{E}[W_s(T)] + W_T)^2 \right), \quad (11)$$

para $T \geq 1$. Además $\mathbb{E}[W_s(1)] = W_0 e^{\mu-\delta}$, y $\text{Var}(W_s(1)) = W_0^2 e^{2(\mu-\delta)} (e^{\sigma^2} - 1)$.

Si se asumen aportes iguales, i.e., $W_i = W_0 > 0$ para todo i y además $\mu \neq \delta$, la esperanza en (5) se simplifica a la siguiente expresión

$$\mathbb{E}[W_s(T)] = W_0 \frac{e^{\mu-\delta} (e^{(\mu-\delta)T} - 1)}{e^{\mu-\delta} - 1}. \quad (12)$$

Para el caso $\mu = \delta$, resulta claro que $\mathbb{E}[W_s(T)] = W_0 T$. Si $\mu < \delta$, el valor esperado del fondo en el largo plazo es

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}[W_s(T)] = \mathbb{E}[W_s(\infty)] = W_0 \frac{e^{\mu-\delta}}{1 - e^{\mu-\delta}}. \quad (13)$$

Por otro lado, la varianza en (9) se puede descomponer en $\text{Var}(W_s(T)) = \mathbb{E}[W_s(T)^2] - \mathbb{E}[W_s(T)]^2$, y bajo el supuesto de aportes iguales se tiene

$$\mathbb{E}[W_s(T)^2] = W_0 \left[\frac{e^{(\mu-\delta)+\sigma^2} + 1}{e^{(\mu-\delta)+\sigma^2} - 1} A_s(T) - \frac{2e^{(\mu-\delta)+\sigma^2}}{e^{(\mu-\delta)+\sigma^2} - 1} \mathbb{E}[W_s(T)] \right], \quad (14)$$

donde $\mathbb{E}[W_s(T)]$ es dado por (12) y $A_s(T)$ satisface

$$A_s(T) = W_0 \frac{e^{2(\mu-\delta)+\sigma^2} (e^{(2(\mu-\delta)+\sigma^2)T} - 1)}{e^{2(\mu-\delta)+\sigma^2} - 1}. \quad (15)$$

Con lo cual, $\text{Var}(W_s(T))$ se conocería en forma explícita al tener disponibles las expresiones de $\mathbb{E}[W_s(T)^2]$ y $\mathbb{E}[W_s(T)]$ en (14) y (12), respectivamente. Notar que $A_s(T)$ corresponde al valor en T de un fondo con aportes $W_i = W_0 > 0$ y una tasa de crecimiento igual a $2(\mu - \delta) + \sigma^2$. En los casos extremos, $(\mu - \delta) + \sigma^2 = 0$ y $2(\mu - \delta) + \sigma^2 = 0$, las expresiones (14) y (15) deben ser evaluadas utilizando

los límites apropiados. Finalmente, si $\mu - \delta < -\frac{\sigma^2}{2}$, la varianza en el largo plazo del fondo bajo comisión por saldo es

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Var}(W_s(T)) = \text{Var}(W_s(\infty)) = \left(W_0 \frac{e^{\mu-\delta}}{1 - e^{\mu-\delta}} \right)^2 \frac{e^{\sigma^2} - 1}{1 - e^{2(\mu-\delta)+\sigma^2}}. \quad (16)$$

2.2 Comisión por flujo o sueldo

Sea $\alpha > 0$ la tasa de la comisión por flujo. Si el afiliado realiza un aporte W_i en el mes i , la comisión que pagaría a la AFP (en el momento del aporte) sería igual a $C_i = W_i(1 - e^{-\alpha})$. Considerando que la comisión C_i pudo ser invertida en el fondo, el aporte del afiliado ajustado por el costo de oportunidad de C_i puede expresarse como $e^{-\alpha}W_i$ (al tener $\alpha > 0$ lo que se está haciendo es sustraer la comisión del monto del aporte). A partir de este supuesto, el aporte ajustado de la comisión por flujo en el mes i , W_f^i , evolucionaría según el siguiente proceso estocástico

$$W_f^i(t) = W_i e^{-\alpha} e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-i) + \sigma(B(t) - B(i))}, \quad i \leq t \leq T, \quad (17)$$

donde los $W_f^i(t)$ están sujetos a la misma fuente de incertidumbre B introducida por (1). Para el afiliado es importante calcular el monto del fondo final ajustado por el costo de oportunidad de la comisión por flujo. Si denotamos dicho monto

final como $W_f(T)$, es fácil inferir que

$$W_f(T) = \sum_{i=0}^{T-1} W_f^i(T). \quad (18)$$

Es importante recalcar que $W_f(T)$ no representa el verdadero monto final del fondo del afiliado, sino un monto final ajustado por el costo de oportunidad de la comisión por flujo. El fondo final del afiliado sería igual a $e^\alpha W_f(T)$. Con lo cual, al incorporar dicho costo de oportunidad se han hecho $W_f(T)$ y $W_s(T)$ comparables.

Se va a calcular la esperanza y la varianza de $W_f(T)$. A partir del GBM en (17) resulta claro que

$$\mathbb{E}[W_f^i(T)] = W_i e^{-\alpha} e^{\mu(T-i)}, \quad (19)$$

con lo cual

$$\mathbb{E}[W_f(T)] = e^{-\alpha} \sum_{i=0}^{T-1} W_i e^{\mu(T-i)} = e^{-\alpha+\mu T} \sum_{i=0}^{T-1} W_i e^{-\mu i}. \quad (20)$$

Con una lógica muy similar a la utilizada en la comisión por saldo, se demuestra que la varianza de $W_f(T)$ es

$$\text{Var}(W_f(T)) = \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} W_i W_j e^{-2\alpha+\mu(T-i+T-j)} \left(e^{\sigma^2(T-\max\{i,j\})} - 1 \right). \quad (21)$$

Es posible expresar el valor esperado y la varianza de $W_f(T+1)$ como funciones del valor esperado y la varianza de $W_f(T)$ y el aporte W_T . La relación recursiva

para el cálculo de $\mathbb{E}[W_f(T + 1)]$ es

$$\mathbb{E}[W_f(T + 1)] = e^\mu(\mathbb{E}[W_f(T)] + e^{-\alpha}W_T), \quad (22)$$

mientras que la de la varianza es dada por

$$\text{Var}(W_f(T + 1)) = e^{2\mu} \left(e^{\sigma^2} \text{Var}(W_f(T)) + (e^{\sigma^2} - 1)(\mathbb{E}[W_f(T)] + e^{-\alpha}W_T)^2 \right), \quad (23)$$

para $T \geq 1$. Además $\mathbb{E}[W_f(1)] = W_0e^{-\alpha+\mu}$, y $\text{Var}(W_f(1)) = W_0^2e^{-2\alpha+2\mu}(e^{\sigma^2} - 1)$.

Si se asumen aportes iguales, i.e., $W_i = W_0 > 0$ para todo i y $\mu \neq 0$, la esperanza en (20) se simplifica a la siguiente expresión

$$\mathbb{E}[W_f(T)] = W_0 \frac{e^{-\alpha+\mu} (e^{\mu T} - 1)}{e^\mu - 1}. \quad (24)$$

Para el caso $\mu = 0$, resulta claro que $\mathbb{E}[W_f(T)] = W_0e^{-\alpha T}$. Si $\mu < 0$, el valor esperado del fondo en el largo plazo es

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}[W_f(T)] = \mathbb{E}[W_f(\infty)] = W_0 \frac{e^{-\alpha+\mu}}{1 - e^\mu}. \quad (25)$$

La varianza en (21) se puede descomponer en $\text{Var}(W_f(T)) = \mathbb{E}[W_f(T)^2] - \mathbb{E}[W_f(T)]^2$, y bajo el supuesto de aportes iguales se tiene

$$\mathbb{E}[W_f(T)^2] = W_0e^{-\alpha} \left[\frac{e^{\mu+\sigma^2} + 1}{e^{\mu+\sigma^2} - 1} e^{-\alpha} A(T) - \frac{2e^{\mu+\sigma^2}}{e^{\mu+\sigma^2} - 1} \mathbb{E}[W_f(T)] \right], \quad (26)$$

donde $\mathbb{E}[W_f(T)]$ es dado por (24) y $A(T)$ satisface

$$A(T) = W_0 \frac{e^{2\mu+\sigma^2}(e^{(2\mu+\sigma^2)T} - 1)}{e^{2\mu+\sigma^2} - 1}. \quad (27)$$

Con lo cual, $\text{Var}(W_f(T))$ se conocería en forma explícita al tener disponibles las expresiones de $\mathbb{E}[W_f(T)^2]$ y $\mathbb{E}[W_f(T)]$ en (26) y (24), respectivamente. Notar que $A(T)$ corresponde al valor en T de un fondo con aportes $W_i = W_0 > 0$ y una tasa de crecimiento igual a $2\mu + \sigma^2$. En los casos extremos, $\mu + \sigma^2 = 0$ y $2\mu + \sigma^2 = 0$, las expresiones (26) y (27) deben ser evaluadas utilizando los respectivos límites. Finalmente, si $\mu < -\frac{\sigma^2}{2}$, la varianza en el largo plazo del fondo bajo comisión por flujo es

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Var}(W_f(T)) = \text{Var}(W_f(\infty)) = \left(W_0 \frac{e^{-\alpha+\mu}}{1 - e^\mu} \right)^2 \frac{e^{\sigma^2} - 1}{1 - e^{2\mu+\sigma^2}}. \quad (28)$$

2.3 Comparación de comisiones por flujo y saldo

El afiliado necesita determinar la idoneidad de uno u otro esquema de cobro de comisiones. La comparación entre dichos esquemas puede realizarse utilizando por ejemplo: el ratio de los valores esperados de los fondos finales, el ratio de los valores futuros de las comisiones por pagar, la inversa del coeficiente de variación del fondo final, y el valor en exceso del fondo final por unidad de riesgo. En el resto de esta sección describiremos y analizaremos en detalle dichos métodos.

2.3.1 Ratio de los valores esperados de fondos finales

Para un afiliado es importante comparar los valores finales de los fondos bajo ambos tipos de comisiones. Es decir, se tendría que comparar $W_s(T)$ con $W_f(T)$. Dicha comparación podría hacerse a través del ratio de los respectivos valores esperados. Consecuentemente, podemos definir

$$\text{RE}_{sf} = \frac{\mathbb{E}[W_s(T)]}{\mathbb{E}[W_f(T)]}, \quad (29)$$

donde $\mathbb{E}[W_s(T)]$ y $\mathbb{E}[W_f(T)]$ están dados por las expresiones (5) y (20), respectivamente.

Para el caso de un único aporte, consideremos que éste ocurre en i^* , es decir que $W_{i^*} > 0$ y $W_i = 0$ para todo $i \neq i^*$. Bajo este supuesto, es claro que $\mathbb{E}[W_s(T)] = W_{i^*}e^{(\mu-\delta)(T-i^*)}$ y $\mathbb{E}[W_f(T)] = W_{i^*}e^{-\alpha}e^{\mu(T-i^*)}$, lo cual implica que $\text{RE}_{sf} = e^{\alpha-\delta(T-i^*)}$. La comisión por saldo será beneficiosa para el afiliado cuando $\text{RE}_{sf} \geq 1$, y esta condición equivale a tener $\delta \leq \frac{\alpha}{T-i^*}$. En conclusión, si se tiene un único aporte, RE_{sf} es independiente de μ y de W_{i^*} , y además éste disminuye a medida que aumenta T . Notar que en vez de considerar un horizonte T se puede asumir que $T^* = T - i^*$ es el nuevo horizonte de aportes, y la condición se transforma en $\delta \leq \frac{\alpha}{T^*}$.

Para el caso de múltiples aportes asumimos sin pérdida de generalidad que $W_i > 0$ para todo $0 \leq i \leq T - 1$ con $T > 1$. Bajo estas condiciones podemos

expresar RE_{sf} de las siguientes dos formas:

$$RE_{sf} = e^{\alpha-\delta} \frac{W_0 e^{(\mu-\delta)(T-1)} + W_1 e^{(\mu-\delta)(T-2)} + \dots + W_{T-1}}{W_0 e^{\mu(T-1)} + W_1 e^{\mu(T-2)} + \dots + W_{T-1}}, \quad (30)$$

$$RE_{sf} = e^{\alpha-\delta T} \frac{W_0 + W_1 e^{-(\mu-\delta)} + \dots + W_{T-1} e^{-(\mu-\delta)(T-1)}}{W_0 + W_1 e^{-\mu} + \dots + W_{T-1} e^{-\mu(T-1)}}. \quad (31)$$

A partir de (31) se puede demostrar que

$$\begin{aligned} \frac{\partial RE_{sf}}{\partial \mu} = & \frac{e^{\alpha-\delta T}}{\left(W_0 + \sum_{i=1}^{T-1} W_i e^{-\mu i}\right)^2} \left\{ \left(-\sum_{i=1}^{T-1} W_i i e^{-(\mu-\delta)i}\right) \left(W_0 + \sum_{i=1}^{T-1} W_i e^{-\mu i}\right) + \right. \\ & \left. \left(W_0 + \sum_{i=1}^{T-1} W_i e^{-(\mu-\delta)i}\right) \left(\sum_{i=1}^{T-1} W_i i e^{-\mu i}\right) \right\} < 0, \end{aligned} \quad (32)$$

con lo cual RE_{sf} es una función estrictamente decreciente en μ y esta relación es independiente de la secuencia de aportes W_i . A partir del resultado anterior, es posible encontrar una cota superior, UB, y otra inferior LB, para RE_{sf} . Utilizando (30) se tiene $UB = \lim_{\mu \rightarrow -\infty} RE_{sf} = e^{\alpha-\delta}$, y utilizando (31) se tiene $LB = \lim_{\mu \rightarrow \infty} RE_{sf} = e^{\alpha-\delta T}$. Con lo cual se tiene:

$$LB = e^{\alpha-\delta T} \leq RE_{sf} \leq e^{\alpha-\delta} = UB, \quad \text{para } T \geq 1. \quad (33)$$

Notar que las cotas son independientes de la secuencia de aportes W_i y la tasa de crecimiento μ , y éstas serían estrictas en el caso de tener dos o más aportes en el fondo. Si $\alpha \leq \delta$, se tiene $UB \leq 1$ y por consiguiente $\mathbb{E}[W_s(T)] \leq \mathbb{E}[W_f(T)]$, i.e., la comisión por flujo sería siempre preferible al comparar los valores esperados

de los fondos finales. Adicionalmente, a partir del valor de LB podemos afirmar que cuando $\delta < \frac{\alpha}{T}$ se tiene $\text{RE}_{sf} > 1$. Es decir que $\mathbb{E}[W_s(T)] > \mathbb{E}[W_f(T)]$ si se satisface la condición anterior. Es importante mencionar que pueden existir estructuras de aportes o parámetros tales que $\mathbb{E}[W_s(T)] \geq \mathbb{E}[W_f(T)]$ para todo $T \geq 1$ sin que necesariamente se cumpla la condición anterior.

Si asumimos $W_i = W_0 > 0$ para todo el horizonte, RE_{sf} es independiente del monto del aporte W_0 . Bajo este supuesto, y utilizando (12) y (24), la expresión de RE_{sf} en (29) cuando $\mu \neq 0$ y $\mu \neq \delta$ se simplifica a

$$\text{RE}_{sf}^*(\mu, \alpha, \delta, T) = \frac{e^{\alpha-\delta} (e^{(\mu-\delta)T} - 1) (e^\mu - 1)}{(e^{\mu T} - 1) (e^{\mu-\delta} - 1)}. \quad (34)$$

Apartir de (34) se pueden verificar los valores de UB y LB en (33), además de demostrar también que $\frac{\partial \text{RE}_{sf}^*}{\partial \mu} < 0$. Una propiedad interesante del caso $W_i = W_0 > 0$ es que $\text{RE}_{sf}^*(\mu, \alpha, \delta, T) > \text{RE}_{sf}^*(\mu, \alpha, \delta, T + 1)$ para todo $T \geq 1$. Si se tiene $\mu > 0$ entonces $\lim_{T \rightarrow \infty} \text{RE}_{sf}^* = 0$, y si además tenemos $\alpha > \delta$, existirá \widehat{T}_E tal que $\mathbb{E}[W_s(T)] \geq \mathbb{E}[W_f(T)]$ para $1 \leq T \leq \widehat{T}_E$, y $\mathbb{E}[W_s(T)] < \mathbb{E}[W_f(T)]$ para $T > \widehat{T}_E$. Por otro lado, si se tiene $\mu < 0$ entonces

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{RE}_{sf}^* = e^{\alpha-\delta} \left(\frac{1 - e^\mu}{1 - e^{\mu-\delta}} \right), \quad (35)$$

y existirá \widehat{T}_E (similar al caso anterior) cuando $\delta < \alpha < \delta + \ln \left(\frac{1 - e^{\mu-\delta}}{1 - e^\mu} \right)$. Es importante mencionar que el caso más común es cuando $\mu > 0$ y $\alpha > \delta$, y

por lo general sería posible encontrar \widehat{T}_E tal que para horizontes mayores a \widehat{T}_E , la comisión por flujo sería preferible a la comisión por saldo bajo el criterio considerado.

2.3.2 Ratio de los valores futuros de las comisiones por pagar

Otra alternativa para comparar los esquemas de comisiones por saldo y flujo se obtiene al considerar los montos de las comisiones por cobrar al afiliado. Es claro que en el esquema por flujo, la única comisión cobrada por el aporte W_i satisface

$$C_f^i = W_i(1 - e^{-\alpha}), \quad \forall i = 0, \dots, T - 1. \quad (36)$$

Asimismo, el aporte W_i bajo comisión por saldo genera el siguiente flujo esperado de comisiones mensuales:

$$C_s^i(j) = W_i e^{\mu} e^{(\mu-\delta)(j-(i+1))} (1 - e^{-\delta}), \quad (37)$$

donde j es un mes particular tal que $j = i + 1, \dots, T$. Si utilizamos una tasa de descuento mensual d (en tiempo continuo) tal que $d \neq \mu - \delta$, el valor futuro en T del flujo de comisiones por saldo generado por el aporte W_i es igual a

$$VF_s^i(d) = \sum_{j=i+1}^T e^{d(T-j)} C_s^i(j) = W_i \frac{(e^{\delta} - 1) (e^{d(T-i)} - e^{(\mu-\delta)(T-i)})}{e^{d-\mu+\delta} - 1}. \quad (38)$$

Mientras que el valor futuro en T de la comisión C_f^i en (36) viene dado por

$$\text{VF}_f^i(d) = W_i(1 - e^{-\alpha})e^{d(T-i)}. \quad (39)$$

Consecuentemente, se puede definir el ratio de los valores futuros de las comisiones totales a una tasa de descuento d , $\text{RC}_{sf}(d)$, como

$$\text{RC}_{sf}(d) = \frac{\sum_{i=0}^{T-1} \text{VF}_s^i(d)}{\sum_{i=0}^{T-1} \text{VF}_f^i(d)}. \quad (40)$$

Incorporando las definiciones (38) y (39) en la expresión (40) se tiene

$$\text{RC}_{sf}(d) = \frac{e^{\mu-\delta}}{e^{d-\delta}} \frac{(e^\delta - 1)}{(e^\delta - e^{\mu-d})} \frac{e^\alpha}{(e^\alpha - 1)} \frac{\sum_{i=0}^{T-1} W_i (e^{d(T-i)} - e^{(\mu-\delta)(T-i)})}{\sum_{i=0}^{T-1} W_i e^{d(T-i)}}, \quad (41)$$

Es importante notar que cuando $d = \mu$, el ratio $\text{RC}_{sf}(d)$ en (40) pudo encontrarse de una manera directa. Basta notar que los procesos estocásticos (2) y (17) asumen que las comisiones crecen a tasa μ , y como α es constante se tiene

$$\text{RC}_{sf}(\mu) = \frac{e^\alpha \mathbb{E}[W_f(T)] - \mathbb{E}[W_s(T)]}{e^\alpha \mathbb{E}[W_f(T)] - \mathbb{E}[W_f(T)]} = \frac{e^\alpha - \text{RE}_{sf}}{e^\alpha - 1}. \quad (42)$$

Si además asumimos $W_i = W_0 > 0$, la expresión de $\text{RC}_{sf}(\mu)$ se simplifica a

$$\text{RC}_{sf}^*(\mu) = \frac{1}{(e^\alpha - 1)} \left(e^\alpha - \frac{e^{\alpha-\delta} (e^{(\mu-\delta)T} - 1) (e^\mu - 1)}{(e^{\mu T} - 1) (e^{\mu-\delta} - 1)} \right), \quad (43)$$

y (43) se puede relacionar con el ratio RE_{sf}^* en (34) a través de:

$$RC_{sf}^*(\mu) = \frac{e^\alpha - RE_{sf}^*}{e^\alpha - 1}. \quad (44)$$

2.3.3 Inversa del coeficiente de variación del fondo final

Es posible determinar la conveniencia de uno u otro esquema de comisión a través del ratio entre el valor esperado del fondo final (ajustado por comisiones) y su desviación estándar respectiva. Para los sistemas de cobro estudiados, los ratios serían

$$H_s = \frac{\mathbb{E}[W_s(T)]}{\sqrt{\text{Var}(W_s(T))}}, \quad \text{y} \quad H_f = \frac{\mathbb{E}[W_f(T)]}{\sqrt{\text{Var}(W_f(T))}}. \quad (45)$$

Donde $\mathbb{E}[W_s(T)]$ y $\mathbb{E}[W_f(T)]$ vienen dados por (5) y (20), y $\text{Var}(W_s(T))$ y $\text{Var}(W_f(T))$ por (9) y (21), respectivamente. En este criterio, si para ciertos parámetros se cumple que $H_s > H_f$, entonces la comisión por saldo sería preferible. Utilizando los valores esperados y varianzas de los fondos finales, los ratios en (45) se pueden expresar como

$$H_s = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} W_i W_j e^{(\mu-\delta)(T-i+T-j)}}{\sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} W_i W_j (\rho_{ij} - 1) e^{(\mu-\delta)(T-i+T-j)}}, \quad (46)$$

$$H_f = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} W_i W_j e^{\mu(T-i+T-j)}}{\sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} W_i W_j (\rho_{ij} - 1) e^{\mu(T-i+T-j)}}, \quad (47)$$

y ρ_{ij} es dado por

$$\rho_{ij} = e^{\sigma^2(T - \max\{i,j\})}. \quad (48)$$

Cuando se realiza un único aporte en $i^* < T$, los ratios se simplifican a

$$H_f = H_s = \frac{1}{\sqrt{e^{\sigma^2(T-i^*)} - 1}}, \quad (49)$$

con lo cual ambos esquemas de comisión generarían el mismo ratio.

Sin pérdida de generalidad se asume que $W_i > 0$ para todo $i = 0, \dots, T - 1$ con $T > 1$. Asimismo, se puede hacer a H_f una función de la tasa de crecimiento μ , y se demuestra que para $T > 1$

$$\frac{\partial H_f(\mu)}{\partial \mu} < 0. \quad (50)$$

La expresión en (50) es equivalente a $H_s > H_f$ para cualquier conjunto común de parámetros, pues $H_f > 0$, $\delta > 0$, y α se cancela en H_f . Consecuentemente, la comisión por saldo genera siempre un mejor ratio que la comisión por flujo. Al ser H_s y H_f funciones monótonas en μ , es posible encontrar una cota superior \widehat{UB} , y otra inferior \widehat{LB} para dichos ratios. Después de una apropiada manipulación de (47) se tiene que

$$\widehat{UB} = \lim_{\mu \rightarrow -\infty} H_f = \frac{1}{\sqrt{e^{\sigma^2} - 1}}, \quad (51)$$

$$\widehat{\text{LB}} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} H_f = \frac{1}{\sqrt{e^{\sigma^2 T} - 1}}. \quad (52)$$

Hasta concluir la presente parte asumiremos $W_i = W_0 > 0$ para todo el horizonte. Es de nuestro interés analizar

$$\text{RH}_{sf}^*(\mu, \delta, T, \sigma^2) = \frac{H_s}{H_f}. \quad (53)$$

El ratio RH_{sf}^* por lo general no presenta monotonicidad en T ; pero, para $T > 1$ se verifica que $\text{RH}_{sf}^*(\mu, \delta, T, \sigma^2) > 1$ como consecuencia directa de (50). En el largo plazo y con $\mu > \delta$, tenemos $\text{RH}_{sf}^*(\mu, \delta, \infty, \sigma^2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \text{RH}_{sf}^*(\mu, \delta, T, \sigma^2)$, donde

$$\text{RH}_{sf}^*(\mu, \delta, \infty, \sigma^2) = \frac{e^\mu - 1}{e^{\mu - \delta} - 1} \sqrt{\frac{(e^{\mu - \delta + \sigma^2} - 1)(e^{2(\mu - \delta) + \sigma^2} - 1)(e^{\mu + \sigma^2} + 1)}{(e^{\mu + \sigma^2} - 1)(e^{2\mu + \sigma^2} - 1)(e^{\mu - \delta + \sigma^2} + 1)}}. \quad (54)$$

Si $\mu < -\frac{\sigma^2}{2}$ también es posible encontrar una relación convergente de largo plazo para RH_{sf}^* dada por

$$\text{RH}_{sf}^*(\mu, \delta, \infty, \sigma^2) = \sqrt{\frac{e^{2(\mu - \delta) + \sigma^2} - 1}{e^{2\mu + \sigma^2} - 1}}. \quad (55)$$

Finalmente, cabe mencionar que $\text{RH}_{sf}^*(\mu, \delta, \infty, \sigma^2)$ en (54) y (55) podría brindar una medida del desempeño relativo de los dos sistemas de comisiones respecto a la inversa del coeficiente de variación del fondo final.

2.3.4 Valor en exceso del fondo final por unidad de riesgo

Se puede utilizar el ratio del valor en exceso del fondo final corregido por riesgo como forma de comparar los esquemas de comisión por saldo y flujo. Dichos ratios se inspiran en Sharpe (1966) y vienen dados por

$$S_s = \frac{\mathbb{E}[W_s(T)] - \sum_{i=0}^{T-1} W_i}{\sqrt{\text{Var}(W_s(T))}}, \quad y \quad S_f = \frac{\mathbb{E}[W_f(T)] - \sum_{i=0}^{T-1} W_i}{\sqrt{\text{Var}(W_f(T))}}. \quad (56)$$

Los numeradores de los ratios en (56) representan el valor final esperado del fondo ajustado por comisiones, menos la suma de todos los aportes realizados. Notar que a diferencia de la inversa del coeficiente de variación, la tasa de la comisión por flujo, α , no se cancela en S_f , por lo cual interviene en la comparación. Además, definimos $\widehat{T}_s = \min\{T \geq 1 \mid S_f(T) > S_s(T)\}$, con lo cual \widehat{T}_s es el menor horizonte de jubilación para el cual la comisión por flujo es más atractiva que la de saldo.

Denotamos $W(T)$ como el valor del fondo final del afiliado en ausencia de comisiones, i.e., $\delta = 0$ y $\alpha = 0$. El valor esperado y la varianza de $W(T)$ se pueden obtener a través de

$$\mathbb{E}[W(T)] = \sum_{i=0}^{T-1} W_i e^{\mu(T-i)}, \quad (57)$$

$$\text{Var}(W(T)) = \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-1} W_i W_j e^{\mu(T-i+T-j)} \left(e^{\sigma^2(T-\max\{i,j\})} - 1 \right). \quad (58)$$

Utilizando $W(T)$, tenemos la siguiente expresión equivalente para S_f en (56)

$$S_f = \frac{\mathbb{E}[W(T)] - e^\alpha \sum_{i=0}^{T-1} W_i}{\sqrt{\text{Var}(W(T))}}. \quad (59)$$

Si $\delta = 0$ y $\alpha > 0$, se cumple que $S_s > S_f$ para cualesquiera parámetros del modelo; pero, no es necesariamente cierto que cuando $\alpha = 0$ se tenga siempre que $S_f > S_s$. Utilizando (59), la condición $S_s > S_f$ es equivalente a $e^\alpha - 1 > \theta(\mu, \delta, T, \sigma^2)$ donde

$$\theta(\mu, \delta, T, \sigma^2) = \left(\frac{\mathbb{E}[W(T)]}{\sum_{i=0}^{T-1} W_i} - 1 \right) - \sqrt{\frac{\text{Var}(W(T))}{\text{Var}(W_s(T))}} \left(\frac{\mathbb{E}[W_s(T)]}{\sum_{i=0}^{T-1} W_i} - 1 \right). \quad (60)$$

Sea $r(T)$ el rendimiento acumulado hasta T del fondo del afiliado sin considerar comisión alguna, y $r_s(T)$ el rendimiento acumulado hasta T del fondo del afiliado bajo comisión por saldo. Entonces, es claro que

$$r(T) = \frac{W(T)}{\sum_{i=0}^{T-1} W_i} - 1, \quad \text{y} \quad r_s(T) = \frac{W_s(T)}{\sum_{i=0}^{T-1} W_i} - 1, \quad (61)$$

con lo cual, la función θ en (60) se puede expresar como

$$\theta(\mu, \delta, T, \sigma^2) = \mathbb{E}[r(T)] - \sqrt{\frac{\text{Var}(r(T))}{\text{Var}(r_s(T))}} \mathbb{E}[r_s(T)]. \quad (62)$$

La condición $e^\alpha - 1 > \theta(\mu, \delta, T, \sigma^2)$ es bastante intuitiva. Ésta nos dice que para un horizonte T , la comisión por saldo será preferible, si el rendimiento necesario para recuperar la comisión por saldo, $e^\alpha - 1$, es mayor que la diferencia entre el

rendimiento esperado del fondo sin comisiones y el rendimiento esperado bajo comisión por saldo; pero, este último ajustado por un factor de riesgo dado por el ratio de desviaciones estándar de los rendimientos.

Como la secuencia de aportes W_i es muy general para obtener conclusiones relevantes, se va a asumir que $W_i = W_0 > 0$. Bajo la condición anterior, la función θ se encuentra disponible en forma explícita, y la denotaremos como θ^* . Si se cumple que $\mu < -\frac{\sigma^2}{2}$, entonces θ^* es estrictamente creciente en T , y existe el valor de largo plazo, θ_{LP}^* , tal que $\lim_{T \rightarrow \infty} \theta^*(\mu, \delta, T, \sigma^2) = \theta_{LP}^* < \infty$. Con lo cual, la comisión por saldo siempre será preferida a la de flujo si y sólo si $e^\alpha - 1 > \theta_{LP}^*$. Utilizando (55) se demuestra que la condición anterior equivale a

$$\alpha > \ln \left(\frac{e^\delta - e^\mu}{1 - e^\mu} \sqrt{\frac{e^{2(\mu-\delta)+\sigma^2} - 1}{e^{2\mu+\sigma^2} - 1}} \right). \quad (63)$$

Cuando $-\frac{\sigma^2}{2} \leq \mu \leq \delta$ se cumple que θ^* es también estrictamente creciente en T ; pero, $\lim_{T \rightarrow \infty} \theta^*(\mu, \delta, T, \sigma^2) = \infty$ con lo cual siempre existirá $\widehat{T}_s < \infty$ para el cual θ^* superará por primera vez la barrera $e^\alpha - 1$. Si $\mu > \delta$ se tiene $\lim_{T \rightarrow \infty} \theta^*(\mu, \delta, T, \sigma^2) = -\infty$, es decir que en el largo plazo siempre la comisión por saldo sería preferible, este hecho se basa en que S_s/S_f tiende a (54) cuando $T \rightarrow \infty$. Asimismo, es posible que exista $\widehat{T}_s < \infty$, o que θ^* sea siempre menor que $e^\alpha - 1$ para todo $T \geq 1$, i.e., $\widehat{T}_s = \infty$. Pero, al parecer no es posible encontrar una relación explícita entre α, μ, δ y σ^2 que garantice $S_s \geq S_f$ para todo $T \geq 1$ y $\mu > \delta$.

También es nuestro interés estudiar el ratio

$$RS_{sf}^*(\mu, \alpha, \delta, T, \sigma^2) = \frac{S_s}{S_f}, \quad S_f \neq 0. \quad (64)$$

Cuando $S_s > 0$ y $S_f > 0$ se preferirá la comisión por saldo si $RS_{sf}^* > 1$; pero, cuando $S_s < 0$ y $S_f < 0$ se preferirá dicha comisión si $RS_{sf}^* < 1$. En otros casos, es más sencillo dejar RS_{sf}^* de lado y comparar directamente S_s y S_f . En cuanto a su comportamiento de largo plazo, $\lim_{T \rightarrow \infty} RS_{sf}^* = \lim_{T \rightarrow \infty} RH_{sf}^*$ cuando $\mu > \delta$, y el valor límite es dado por (54). Pero, cuando $\mu < -\frac{\sigma^2}{2}$ se tiene

$$\lim_{T \rightarrow \infty} RS_{sf}^*(\mu, \alpha, \delta, T, \sigma^2) = \frac{e^\delta - e^\mu}{e^\alpha(1 - e^\mu)} \sqrt{\frac{e^{2(\mu-\delta)+\sigma^2} - 1}{e^{2\mu+\sigma^2} - 1}}. \quad (65)$$

Asimismo, se obtiene la condición (63) si se hace la expresión en (65) menor a uno pues $S_s < 0$ y $S_f < 0$. Finalmente, cabe mencionar que RS_{sf}^* no es necesariamente una función monótona en T como veremos en los ejemplos numéricos de la siguiente sección.

3 Aplicación de la metodología al Sistema Privado de Pensiones del Perú

En esta sección se presenta la aplicación de la metodología expuesta en la sección anterior al Sistema Privado de Pensiones del Perú (SPP). Esta aplicación es relevante debido a que el SPP está atravesando un proceso importante de reforma, parte de la cual consiste en el cambio de comisión por flujo a saldo¹.

3.1 Calibración de los parámetros del GBM

Es necesario calcular los parámetros μ y σ del proceso estocástico del valor cuota del fondo. Para un escenario conservador tenemos que la volatilidad mensual de los rendimientos es $\sigma_C = 0.824\%$, este valor se ha estimado a partir de los rendimientos logarítmicos diarios de los fondos Tipo 1 (riesgo bajo) del SPP. La volatilidad mensual del escenario moderado se considera $\sigma_M = 2.511\%$, dicho valor se ha estimado a partir de los rendimientos diarios de los fondos Tipo 2 (riesgo moderado) del SPP. Asimismo, la volatilidad mensual del escenario agresivo se considera $\sigma_A = 4.212\%$, dicho valor se ha calculado a partir de los rendimientos de los fondos Tipo 3 (riesgo alto) del SPP. En los tres casos se ha considerado para la calibración información diaria del 02/01/2009 al 30/05/2013. Además, asumimos que los rendimientos anuales de los fondos conservador, moderado y agresivo son $r_C = 3.00\%$, $r_M = 5.00\%$ y $r_A = 7.00\%$,

¹En realidad los afiliados migrarán a una comisión mixta que tiene un componente transitorio por flujo. A partir del año 10 la comisión será únicamente por saldo.

respectivamente. Finalmente, por teoría del GBM tenemos que $r_i = \mu_i - 0.5\sigma_i^2$ para $i = C, M, A$. Notar que μ_i y σ_i deben ser mensuales. Después de las transformaciones adecuadas tenemos: $\mu_C = 0.0025$, $\mu_M = 0.0044$, y $\mu_A = 0.0065$.

3.2 Comisión por saldo equivalente (valores esperados de fondos finales)

Consideremos $c_f = 1.7575\%$ que es la comisión promedio por flujo del SPP al 30/05/2013. Como el aporte obligatorio al fondo de pensiones es 10% del sueldo y la comisión c_f se aplica sobre el salario, se tiene que $\alpha = -\ln(1 - 10c_f) = 0.1933$. Se quiere determinar el nivel de la comisión por saldo, δ_E^* , que hace al ratio RE_{sf}^* en (34) igual a uno para los escenarios considerados.

En la Figura 1, se muestra el gráfico de δ_E^* (anualizada) para distintas edades² y escenarios de rentabilidad. Se observa que δ_E^* es creciente con la edad, y decreciente en la rentabilidad (para una edad fija). Por ejemplo, si un afiliado tiene 40 años (o equivalentemente $T = (65 - 40) \times 12 = 300$ meses), la comisión por saldo equivalente es de 1.3% en el escenario moderado, esto indicaría que si se fijara una comisión por saldo menor a tal valor, al afiliado le convendría el esquema de comisión por saldo. En el escenario conservador dicho valor crítico sería 1.42%, y en el agresivo 1.2%. Una edad importante a considerar es 37 años pues la mitad de afiliados del SPP tiene menos de dicha edad. El valor δ_E^*

²Si E es la edad del afiliado en años, $T = (65 - E) \times 12$ meses.

para tal edad y un escenario moderado es 1.14%. Con lo cual, si la tasa de la comisión por flujo fuera el promedio del SPP o 1.7575% del salario, y la tasa de la comisión por saldo fijada fuera mayor que 1.14% anual, entonces a la mitad más joven de los afiliados no les convendría la comisión por saldo. Se puede observar que $\delta_E^* > 0.587\%$ para todos escenarios estudiados, con lo cual una comisión por saldo en ese nivel la haría conveniente para prácticamente todos los afiliados del SPP.

3.3 Comisión por saldo equivalente (valor en exceso del fondo final por unidad de riesgo)

Tal como en el caso anterior seguimos considerando $c_f = 1.7575\%$ y $\alpha = 0.1933$; pero, ahora se quiere determinar el nivel de la comisión por saldo, δ_S^* , que hace al ratio RS_{sf}^* en (64) igual a uno para los escenarios considerados.

En la Figura 2, se muestra el gráfico de δ_S^* (anualizada) para distintas edades y escenarios de rentabilidad. Se observa que δ_S^* no es estrictamente creciente con la edad para el escenario agresivo, y alcanza un mínimo de 1.2712% para un afiliado de aproximadamente 27 años. Asimismo, δ_S^* a diferencia de δ_E^* , converge para edades superiores a los 50 años, y es creciente en la rentabilidad para una edad fija. Es importante notar que la comisión por saldo ha mejorado su desempeño respecto a la de flujo al utilizar los valores en exceso ajustados por riesgo (ratio RS_{sf}^*), en vez de los valores esperados de fondos finales (ra-

tio RE_{sf}^*). Se puede observar que $\delta_S^* > \delta_E^*$ para todos los escenarios y edades. Además, una comisión por saldo menor o igual a 0.827% hace que ésta sea más atractiva que la de flujo para todos los escenarios y edades. Con lo cual, la incorporación de la volatilidad en el análisis ha cambiado significativamente la performance relativa de ambos esquemas de comisiones.

La Figura 3 muestra los gráficos de la función θ en (60) para los escenarios considerados y una comisión por saldo anualizada de 1.00%. Además se incluye la línea sólida horizontal $e^\alpha - 1$ que representa el valor límite que hace indiferentes a ambos tipos de comisiones. En el escenario conservador, la comisión por flujo sería preferible para afiliados menores a 27 años. En el escenario moderado la comisión por flujo sería recomendable para afiliados menores de 26 años. En el caso agresivo una comisión por saldo de 1.00% haría siempre preferible a tal esquema, pues la curva nunca cruza el valor límite. Finalmente, se puede verificar que θ no es necesariamente una función monótona en T , y es posible que existan rangos de edades en los cuales un esquema de cobro de comisiones sea preferido al otro, tal como se mencionó en las secciones anteriores.

4 Conclusiones y recomendaciones

En el presente artículo se ha desarrollado una metodología en tiempo discreto que permite comparar comisiones por flujo y saldo en fondos de pensiones durante su fase de acumulación. Al considerar el proceso estocástico del valor

cuota como un movimiento Browniano geométrico (GBM) se han podido calcular valores esperados y varianzas de fondos de pensiones, los cuales han permitido introducir diferentes métodos para comparar ambos tipos de comisión.

Los métodos de comparación considerados fueron: ratio de valores esperados de fondos finales, ratio de valores futuros de comisiones a pagar, inversa del coeficiente de variación del fondo final, y valor en exceso del fondo final por unidad de riesgo. En muchos casos se obtienen resultados muy generales en cuanto al desempeño relativo de los esquemas de comisión al no asumir un patrón particular en la secuencia de aportes. Además se brindan fórmulas y/o expresiones que permiten determinar el tipo de comisión que sería conveniente para cada individuo de darse el caso que pueda elegir la forma de cobro de administración de su fondo de pensiones.

A partir del desarrollo teórico y la aplicación práctica al Sistema Privado de Pensiones del Perú (SPP), se puede afirmar que una comparación utilizando solamente valores esperados de fondos finales resulta incompleta e imprecisa, ya que cuando se añade la varianza del fondo en dicha comparación las conclusiones tienden a cambiar, y en algunos casos de manera importante. Por ejemplo para el SPP, utilizando únicamente valores esperados y ciertos supuestos, una comisión por saldo de 0.5% haría conveniente al esquema por saldo sobre el flujo en casi todo escenario. Sin embargo, si se añade la varianza del fondo en el criterio de comparación, dicha comisión de indiferencia se transforma en

aproximadamente 0.8% para fondos conservadores y moderados, y en 1.25% para fondos más agresivos.

Finalmente, es posible hacer muchos refinamientos a la metodología, los cuales pueden generar nuevas investigaciones. Por ejemplo podrían considerarse aportes que tengan un comportamiento exponencial del tipo $W_i = W_0 e^{\beta i}$, procesos estocásticos más sofisticados para el valor cuota, probabilidad de interrupción de aportes, funciones de utilidad diversas para la comparación de los fondos finales, y por último se podrían contrastar los esquemas utilizando políticas óptimas que permitan cambiar el nivel de riesgo y rendimiento del fondo de acuerdo a la edad del afiliado y tamaño del fondo, en un contexto de optimización estocástica.

Referencias

- [1] David Blake and John Board. Measuring value added in the pensions industry. *Geneva Papers on Risk and Insurance- Issues and Practice*, 25(4):539–567, 2000.
- [2] Andrew JG Cairns. Some notes on the dynamics and optimal control of stochastic pension fund models in continuous time. *Astin Bulletin*, 30(1):19–56, 2000.
- [3] F Javier Corvera, J Mateo Lartigue, and David Madero. Análisis compar-

- ativo de las comisiones por administración de los fondos de pensiones en los países de américa latina. *Mimeo. Ciudad de México*, 2006.
- [4] Peter A Diamond. Administrative costs and equilibrium charges with individual accounts. In *Administrative aspects of investment-based Social Security reform*, pages 137–172. University of Chicago Press, 2000.
- [5] Estelle James, James Smalhout, and Dimitri Vittas. Administrative costs and the organization of individual retirement account systems: a comparative perspective. *World Bank Policy Research Working Paper*, (2554), 2001.
- [6] Stephen J Kay and Barbara E Kritzer. Social security in latin america: recent reforms and challenges. *Federal Reserve Bank of Atlanta Economic Review*, 86(1):41–52, 2001.
- [7] Barbara Kritzer, Stephen Kay, and Tapen Sinha. Next generation of individual account pension reforms in latin america. *Social Security Bulletin*, 71(1):35–76, 2011.
- [8] Óscar Martínez and Andrés Murcia. Sistema de comisiones de las administradoras de fondos de pensiones en colombia. Technical report, Banco de la Republica de Colombia, 2008.
- [9] Lorena Masías and Elio Sánchez. Competencia y reducción de comisiones en el sistema privado de pensiones: El caso peruano. *SBS Documentos de*

Trabajo. Superintendencia de Banca, Seguros y Administradoras de Fondos de Pensiones, 2007.

- [10] Olivia S Mitchell. Administrative costs in public and private retirement systems. In *Privatizing Social Security*, pages 403–456. University of Chicago Press, 1998.
- [11] Monika Queisser. Regulation and supervision of pension funds: principles and practices. *International Social Security Review*, 51(2):39–55, 1998.
- [12] Hemant Shah. Toward better regulation of private pension funds. *World Bank Publications*, (1791), 1997.
- [13] W.F. Sharpe. Mutual fund performance. *The Journal of Business*, 39(1):119–138, 1966.
- [14] Tapen Sinha. *Pension reform in Latin America and its lessons for international policymakers*, volume 23. Kluwer Academic Pub, 2000.
- [15] Tapen Sinha. Analyzing management fees of pension funds: A case study of Mexico. *Journal of Actuarial Practice*, 9:5–43, 2001.

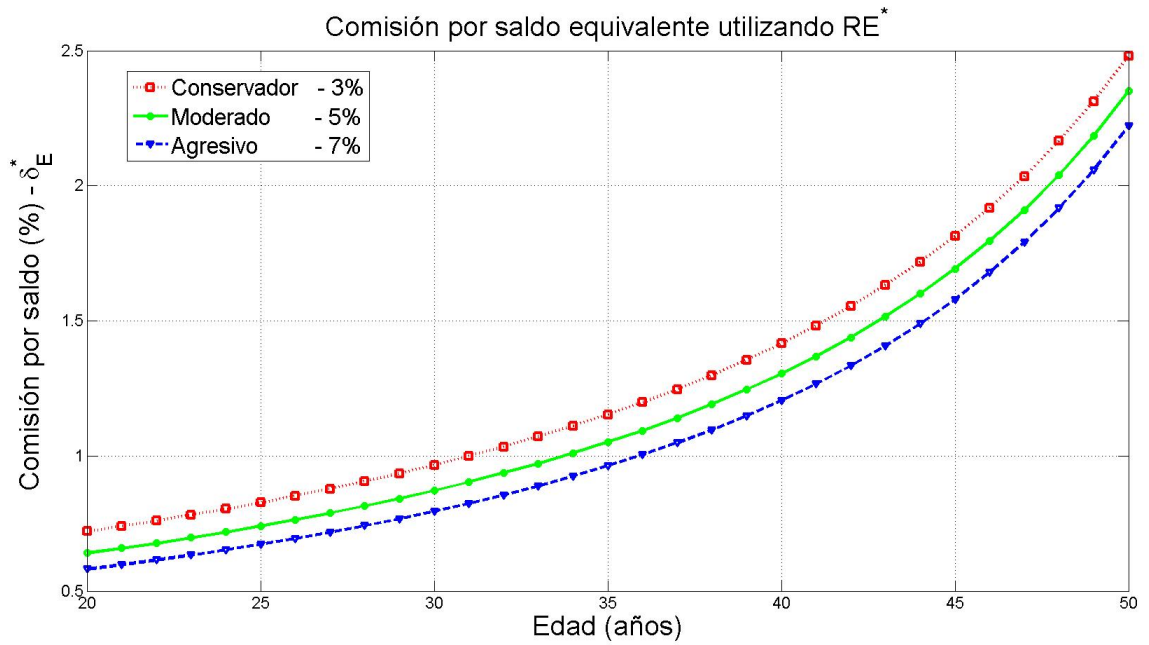


Figura 1: Comisión por saldo equivalente, δ_E^* , tal que $RE_{sf}^* = 1$ para distintas edades y escenarios de rentabilidad. Se ha considerado $c_f = 1.7575\%$ o $\alpha = 0.1933$, aportes iguales, rendimiento conservador de 3% anual, moderado de 5% anual, y agresivo de 7% anual.

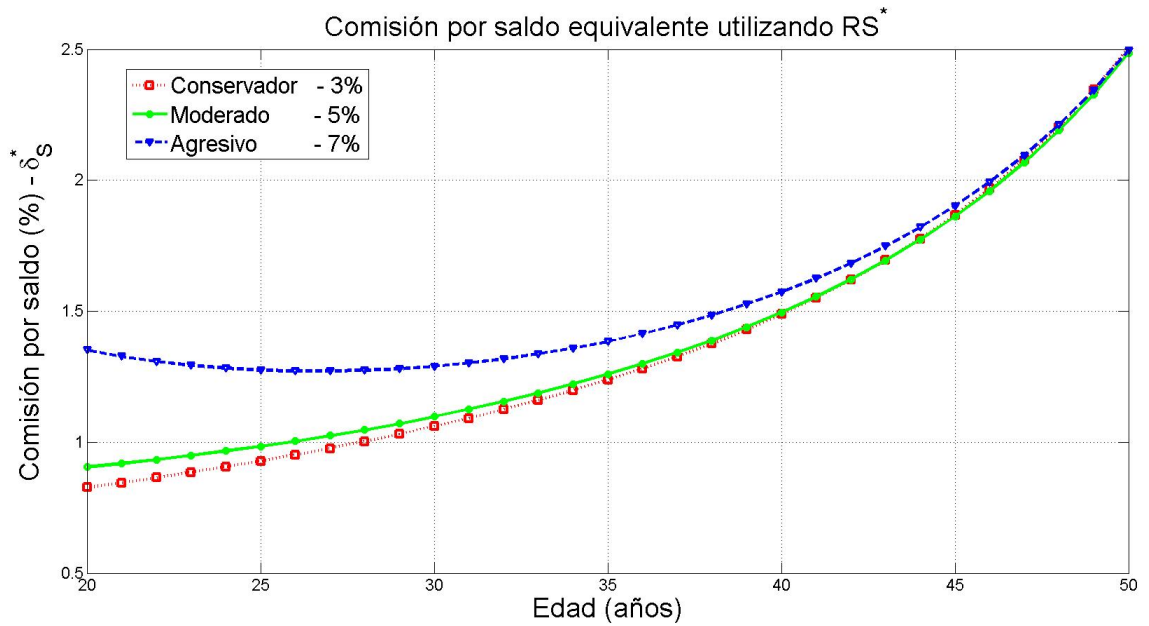


Figura 2: Comisión por saldo equivalente, δ_s^* , tal que $RS_{sf}^* = 1$ para distintas edades y escenarios de rentabilidad. Se ha considerado $c_f = 1.7575\%$ o $\alpha = 0.1933$, aportes iguales, rendimiento conservador de 3% anual con volatilidad de 0.824% mensual, rendimiento moderado de 5% anual con volatilidad de 2.511% mensual, y agresivo de 7% anual con volatilidad de 4.212% mensual.

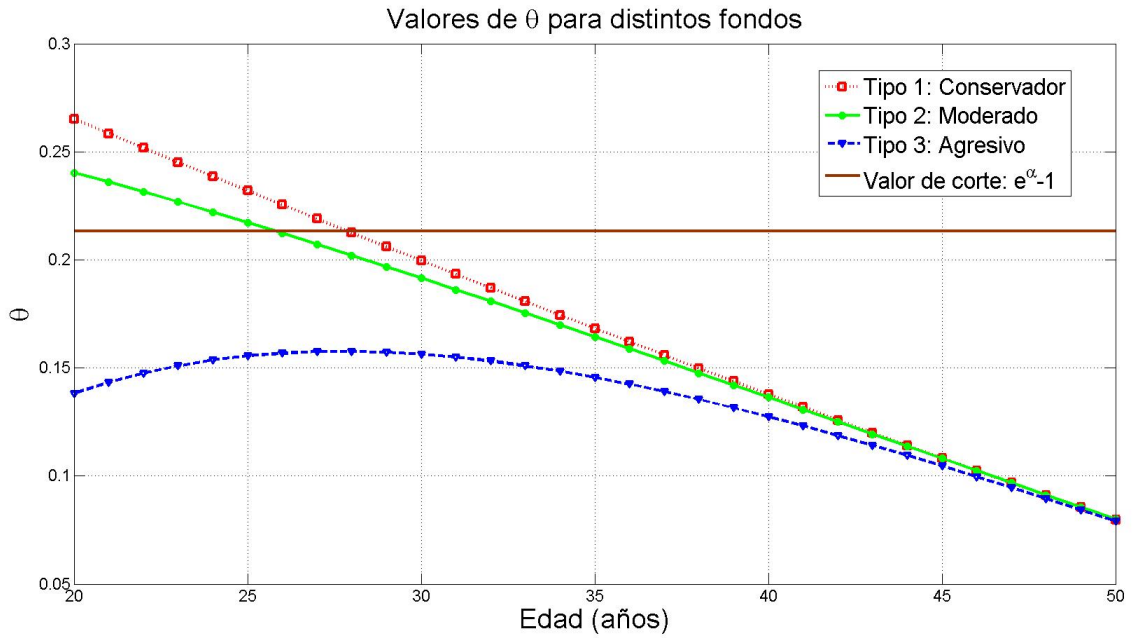


Figura 3: Valor de función θ para distintas edades y tipos de fondo. Se ha considerado $\delta = 1.00\%$ (anualizada), $c_f = 1.7575\%$ o $\alpha = 0.1933$, aportes iguales, y tres tipos de fondos. Tipo 1: rentabilidad 3% anual y volatilidad 0.824% mensual. Tipo 2: rentabilidad 5% anual y volatilidad 2.511% mensual. Tipo 3: rentabilidad 7.00% anual y volatilidad 4.212% mensual. Se incluye valor de corte $e^{\alpha} - 1 = 0.2132$.